

IV.1-Introduction:

Le traitement numérique de signaux bidimensionnels est un domaine très important du traitement numérique des signaux. Cette importance provient principalement du fait qu'en pratique ces signaux représentent des images. Malgré l'énorme quantité de données que font intervenir ces traitements, la souplesse offerte par les méthodes numériques et les progrès de la technologie ont constamment encouragé les chercheurs dans le domaine.

Ceci a permis de vérifier les performances et d'optimiser les paramètres des filtres avant leur éventuelle réalisation.

Les progrès actuels de la technologie des circuits intégrés numériques augmentent l'intérêt économique des filtres numériques. C'est pourquoi, en complément aux résultats bien établis pour la simulation, des méthodes propres pour la synthèse des filtres numériques à impulsions finies ont également été développées [20] [21].

IV.2- Calcul des coefficients par la méthode des moindres carrés -1D:

Soit à calculer les N coefficients h_i d'un filtre RIF de manière à ce que la fonction de transfert approche une fonction donnée suivant un critère des moindres carrés.

Le calcul peut se faire directement à partir de la relation entre les coefficients et la réponse en fréquence. La transformée de Fourier discrète appliquée à la suite h_i , avec $(0 \leq i \leq N-1)$, fournit une suite H_k telle que :

$$H_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} h_i e^{-j 2 \pi \frac{i k}{N}} \quad (\text{IV.1})$$

L'ensemble des H_k , $0 \leq k \leq N-1$, constitue un échantillonnage de la réponse en fréquence du filtre avec le pas $\frac{f_e}{N}$.

Par suite le problème de calcul des N coefficients est équivalent au problème de la détermination de la réponse en fréquence du filtre en N points de l'intervalle $(0, f_e)$.

La fonction $H(f)$ est ensuite obtenue par la formule d'interpolation qui exprime le produit de convolution de la suite d'échantillons $H_K \delta(f - \frac{K}{N} f_e)$ par la transformée de Fourier de la fenêtre rectangulaire échantillonnées :

$$H(f) = \sum_{K=0}^{N-1} H_K \frac{\sin[\pi N (\frac{f}{f_e} - \frac{K}{N})]}{N \sin[\pi (\frac{f}{f_e} - \frac{K}{N})]} \quad (\text{IV.2})$$

On peut remarquer que cette expression constitue un autre type de développement en série de la fonction $H(f)$, à un nombre limité de termes. La fonction à approcher $D(f)$ étant donnée, une première possibilité consiste à choisir les H_k tels que :

$$H_K = D_K(\frac{K}{N} f_e) \quad \text{pour} \quad 0 \leq k \leq N-1$$

C'est la méthode dite de l'échantillonnage en fréquence.

Il est possible de minimiser au sens des moindres carrés, l'écart entre les fonctions $H(f)$ et $D(f)$ qui représente l'erreur quadratique. A cet effet la réponse $H(f)$ est échantillonnée avec un pas de fréquence Δ :

$$\Delta = \frac{f_e}{NL} \quad \text{avec } L \text{ entier supérieur à } 1.$$

La fonction $e(f) = H(f) - D(f)$ est calculée aux fréquences multiple de Δ .

En général, dans l'évolution de l'erreur quadratique E une partie seulement de la bande est à prendre en compte pour exposer le principe du calcul, on suppose que la minimisation porte sur la bande passante $(0, f_1)$ d'un passe-bas, il vient dans cette hypothèse :

$$E = \sum_{n=0}^{N_0} e^2(n \frac{f_e}{NL}) \quad (\text{IV.3})$$

Avec
$$\frac{f_1}{f_e} NL < N_0 \leq \frac{f_1}{f_e} NL + 1$$

IV.3-Filtre RIF à deux dimensions:

Un filtre RIF à deux dimensions défini par une relation entre la sortie $y(n,m)$ et l'entrée $x(n,m)$ qui s'écrit :

$$y(n, m) = \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} a_{ij} x(n-i, m-j) \quad (\text{IV.4})$$

L'ensemble des coefficients a_{ij} constitue une matrice $A_{N_1 N_2}$ dimension $N_1 \times N_2$. La fonction de transfert à deux variables correspondante, $H(Z_1, Z_2)$ s'exprime en fonction de cette matrice par :

$$H(Z_1, Z_2) = \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} a_{ij} Z_1^{-i} Z_2^{-j} \quad (\text{IV.5})$$

Et encore, sous forme vectorielle :

$$H(Z_1, Z_2) = [1, Z_1^{-1}, \dots, Z_1^{-(N_1-1)}] A_{N_1 N_2} \begin{bmatrix} 1 \\ Z_2^{-1} \\ \dots \\ Z_2^{N_2-1} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.6})$$

Les coefficients des filtres à deux dimensions peuvent être calculés directement à partir des spécifications dans le domaine des fréquences à deux dimensions.

Quand la réponse impulsionnelle est une fonction paire par rapport aux deux variables, la réponse en fréquence et les coefficients peuvent être obtenus à partir d'un filtre à une dimension et à phase linéaire. En effet soit $H(\omega)$ la réponse en fréquence d'un filtre, en négligeant le terme de phase, s'exprime par :

$$H(\omega) = h_0 + 2 \sum_{i=1}^p h_i \cos i\omega \quad (\text{IV.7})$$

avec: $\cos i\omega = T_i(\cos \omega)$

$T_i(x)$: polynôme de Tchebychev de degré i .

Dans ces conditions, $H(\omega)$ peut s'écrire :

$$H(\omega) = \sum_{i=0}^p g_i (\cos \omega)^i \quad (\text{IV.8})$$

En suite, le changement de variables:

$$\cos \omega = H_1(\omega_1, \omega_2) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{l=0}^{L-1} t(k, l) \cos k\omega_1 \cos L\omega_2 \quad (\text{IV.9})$$

Conduit à la fonction à deux variables suivantes :

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \sum_{i=0}^p g_i \left(\sum_{k=0}^{K-1} \sum_{l=0}^{L-1} t(k, l) \cos k\omega_1 \cos L\omega_2 \right) \quad (\text{IV.10})$$

Qui peut être réécrite sous la forme :

$$H(\omega_1, \omega_2) = \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2} h_{ij} \cos i\omega_1 \cos j\omega_2 \quad (\text{IV.11})$$

IV.4-Calcul des coefficients des filtres RIF-2D par la méthode des moindres carrés :

Nous développeras la méthode pour un cas particulier important, ce lui des filtres à symétrie quadrantale.

Deux types de filtres correspondant à cette catégorie, les filtres en rectangles et les filtres en losange, avec les domaines de fréquence de la figure (IV.1) [22].

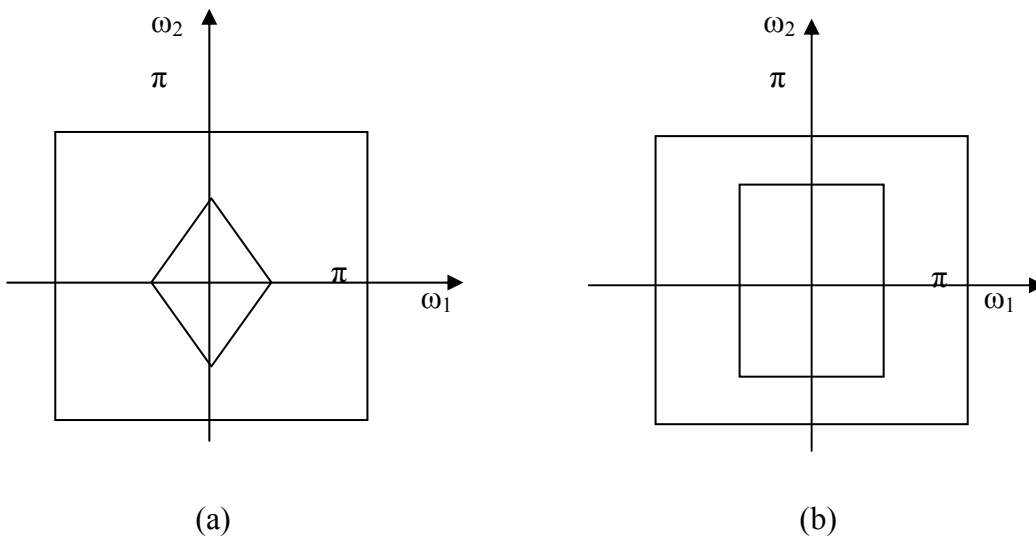


Figure IV.1: Filtre 2D à symétrie quadrantale.

La réponse en fréquence d'un filtre à phase nulle ayant $(2M+1)*(2N+1)$ coefficients avec symétrie quadrantale s'exprime par :

$$H(\omega_1, \omega_2) = h_{00} + 2 \sum_{i=1}^M h_{i0} \cos i\omega_1 + 2 \sum_{j=1}^N h_{0j} \cos j\omega_2 + 4 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N h_{ij} \cos i\omega_1 \cos j\omega_2 \quad (\text{IV.12})$$

Au totale le filtre possède $(1+M+N+MN)$ coefficients h_{ij} de valeurs différentes.

La méthode des moindres carrés avec pondération va être appliquée directement, pour approcher la réponse désirée, $D(\omega_1, \omega_2)$.

Avec un facteur de suréchantillonnage égale à k , la fonction quadratique d'écart, ou fonction coût, à minimiser s'écrit :

$$J = \sum_{m=0}^{K_M} \sum_{n=0}^{K_N} \left| H\left(\frac{m\pi}{K_M} \cdot \frac{n\pi}{K_N}\right) - D\left(\frac{m\pi}{K_M} \cdot \frac{n\pi}{K_N}\right)^2 \right| w\left(\frac{m\pi}{K_M} \cdot \frac{n\pi}{K_N}\right) \quad (\text{IV.13})$$

Avec $K_M=R(M+0.5)$ et $K_N=R(N+0.5)$ a fin de couvrir la totalité du domaine des fréquences utiles.

La fonction de pondération $w(\omega_1, \omega_2)$ permet d'ajuster l'approximation en fonction des spécifications d'ondulation par exemple.

$$J = \sum_{m=0}^{K_M} \sum_{n=0}^{K_N} e^2(m, n) w(m, n) \quad (\text{IV.14})$$

Le minimum de la fonction coût est obtenu pour [R4W2]:

$$\sum_{m=0}^{K_M} \sum_{n=0}^{K_N} e(m, n) w(m, n) \frac{\delta e(m, n)}{\delta h_{ij}} = 0 \quad (\text{IV.15})$$

Ce qui donne un système de $(1+M+N+MN)$ équations.

En désignant par $[h_{ij}]$ le vecteur des coefficients et par $V(m, n)$ le vecteur fréquentielle.

$$V^t(m, n) = \left[1, \dots, 2\cos\left(\frac{m\pi}{K_M}\right), \dots, 2\cos\left(j\frac{n\pi}{K_N}\right), \dots, 4\cos\left(\frac{m\pi}{K_M}\right)\cos\left(j\frac{n\pi}{K_N}\right), \dots \right] \quad (\text{IV.16})$$

La solution s'écrit :

$$[h_{ij}] = \left[\sum_{m=0}^{K_M} \sum_{n=0}^{K_N} W(m, n) V(m, n) V^t(m, n) \right]^{-1} \left[\sum_{m=0}^{K_M} \sum_{n=0}^{K_N} W(m, n) V(m, n) D(m, n) \right] \quad (\text{IV.17})$$

IV.5- Organigramme générale pour l'analyse du filtre RIF:

Les principales étapes de la simulation numérique des filtres RIF son donnees par organigramme de la figure IV.2.

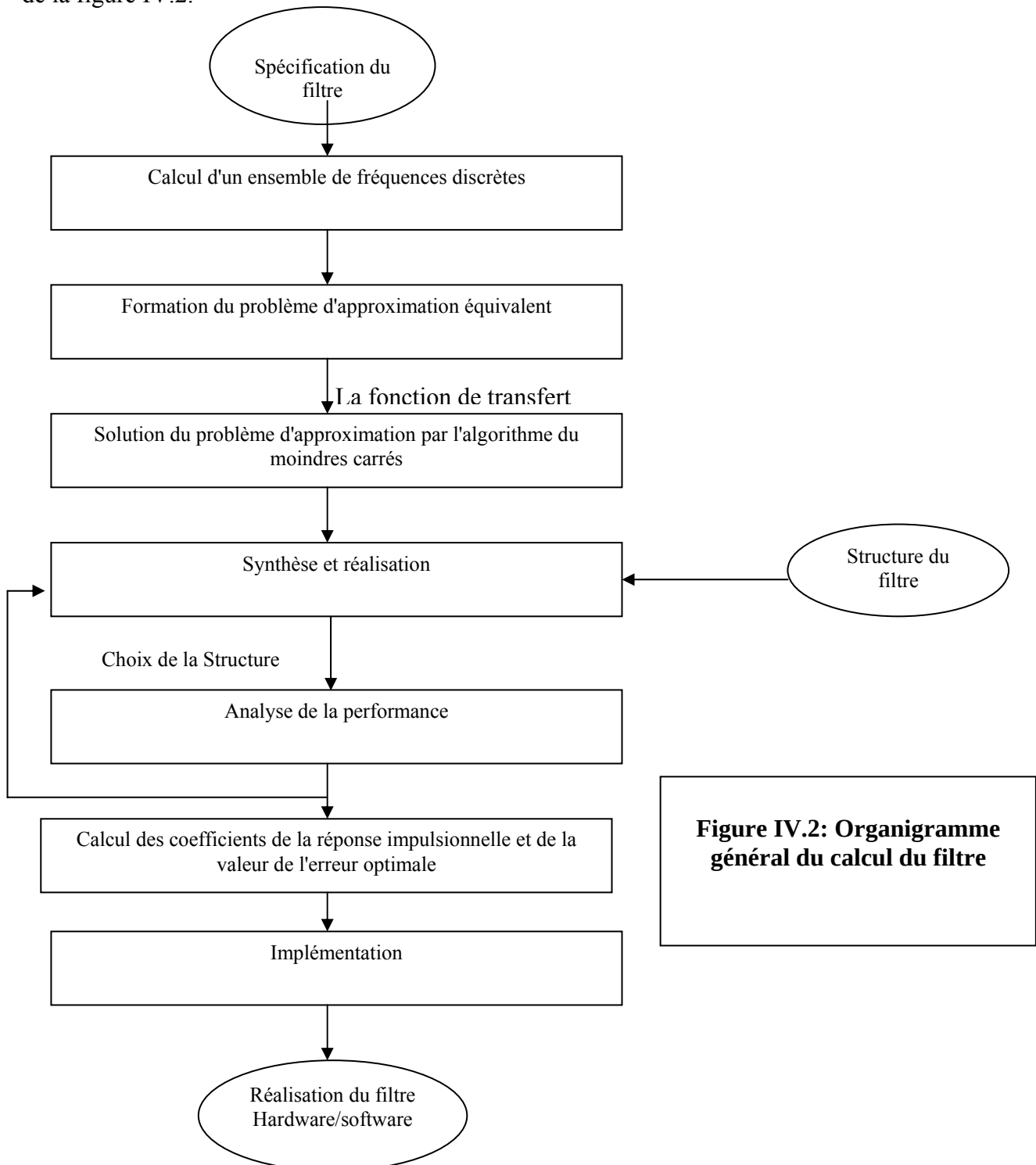


Figure IV.2: Organigramme général du calcul du filtre

IV.6-Résultats et interprétations :

IV.6.1-Fonction de transfert :

Nous avons calculé la fonction de transfert d'un filtre RIF .Les coefficients du filtre coupe - bande sont déterminés par la méthode des moindres carrés .La fonction de transfert est le rapport de la sortie sur l'entrée. Elle caractérise le filtre .Les variations de la fonction de transfert en amplitude est représentées par la (fig.IV.3).

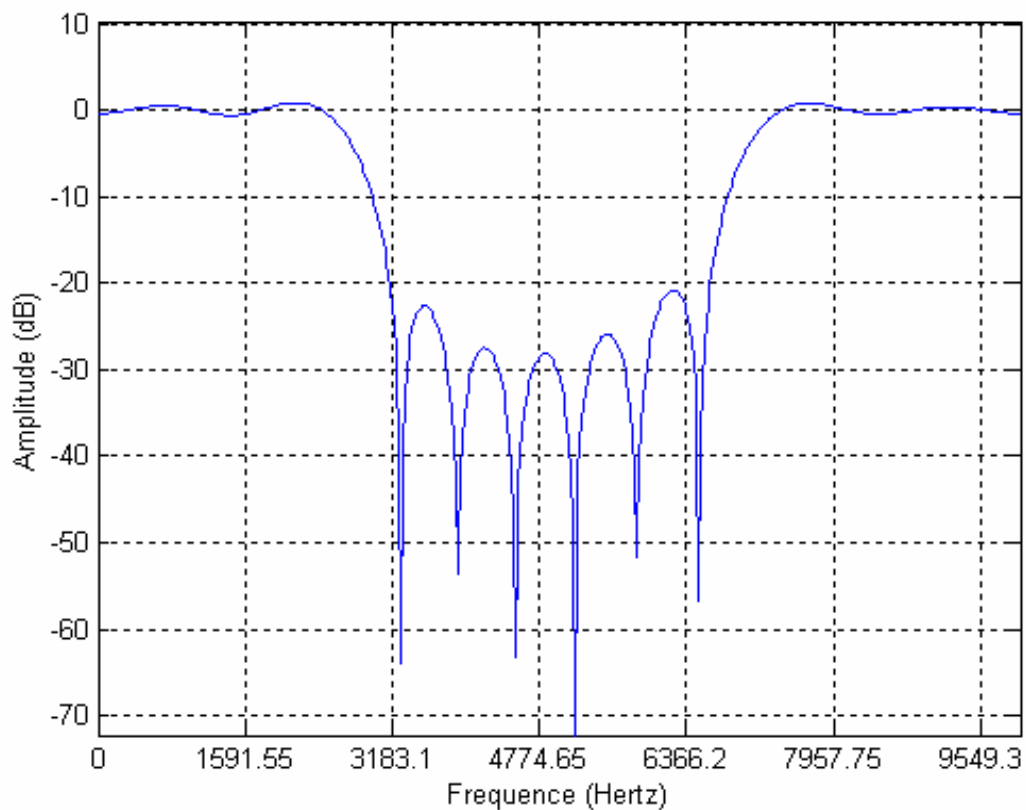


Figure IV.3 : Représentation de la fonction de transfert en amplitude

Comme le filtre numérique est décrit par une équation aux différences, alors nous avons représenté sa fonction de transfert en phase (fig.IV.4).

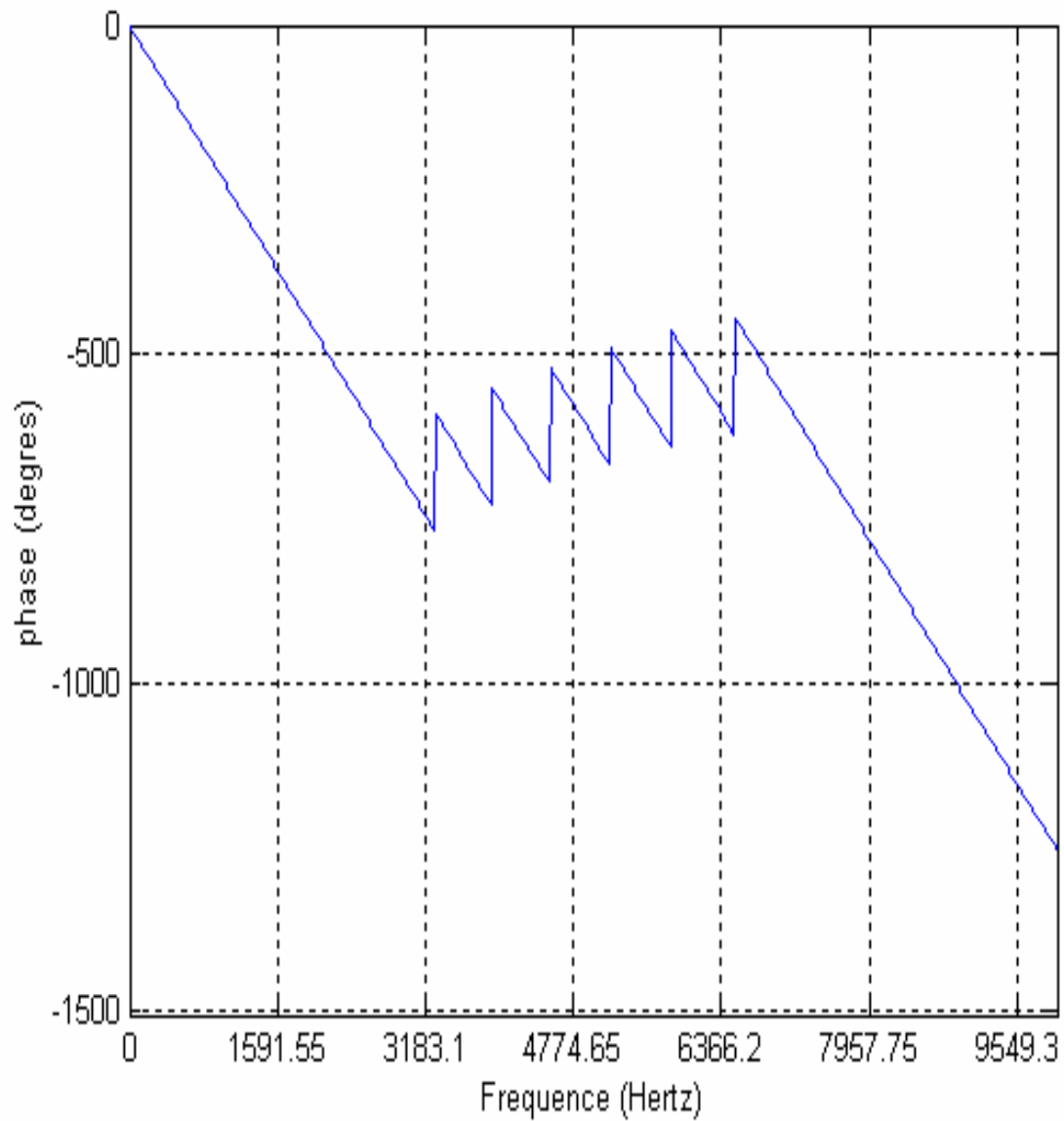


Figure IV.4 : Représentation de la fonction de transfert en phase

IV.6.2-Réponse impulsionnelle :

Le terme de lissage est utilisé principalement lors du passage discret –analogique .La représentation discrète du signal correspond aux valeurs du signal à certains instants (fig.IV.5)

La reconstitution du signal analogique nécessite une interpolation entre ces instants.

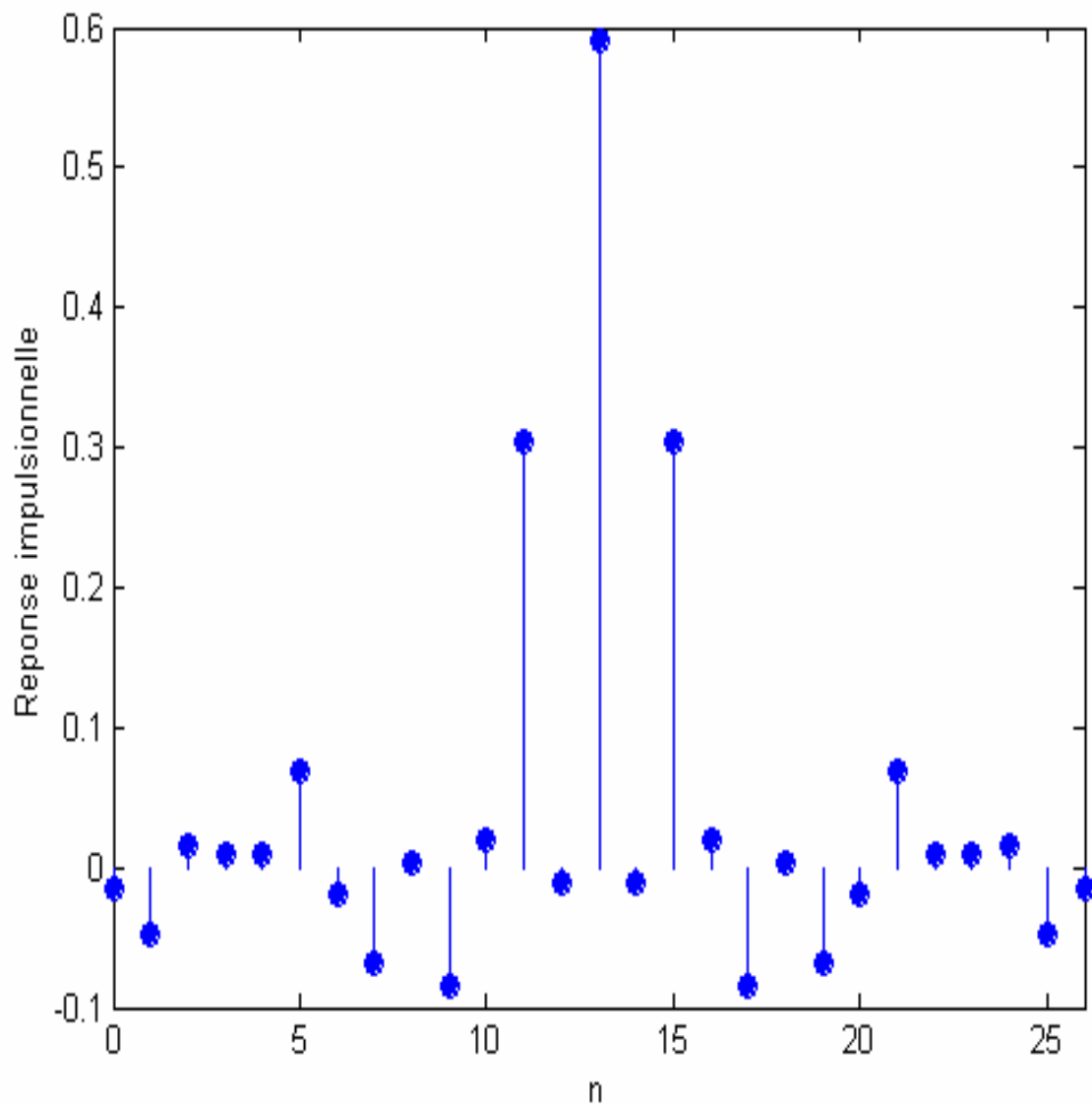


Figure IV.5 :Représentation de la réponse impulsionnelle

IV.6.3-Les zéros du filtre :

Nous appellons zéro d'une fonction de transfert, toute racine du polynôme numérateur de la fonction rationnelle $H(Z)$. Les zéros sont en nombre fini et il n'y a aucun pôle, donc le filtre sera toujours stable (fig.IV.6).

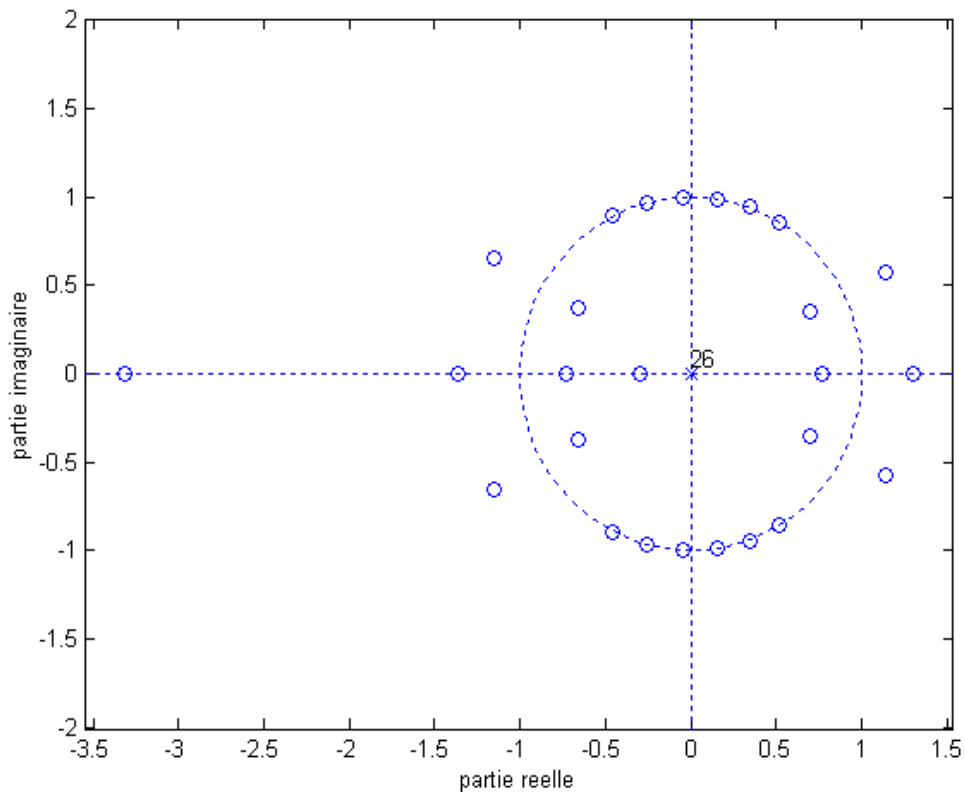


Figure IV.6:Les zéros du filtre

Nous constatons aussi que les conditions de symétrie de la réponse impulsionnelle permettent de localiser les zéros de la fonction de transfert en Z .

IV.6.4-Fonction d'autocorrélation du signal temporel avant et après filtrage :

La fonction d'autocorrélation (fac) du bruit blanc gaussien est égale à une impulsion de Dirac «surélevée» puisque pour ses fortes valeurs de décalage temporel celles-ci tendent vers le carré de la valeur moyenne (fig.IV.7.c) et (fig.IV.7.d).

Dans le cas du bruit blanc filtré (fig.IV.7.a) la fac ne décroît que très lentement (fig. IV.7.b).Elle tenterait également vers le carré de la valeur moyenne qui est nulle.

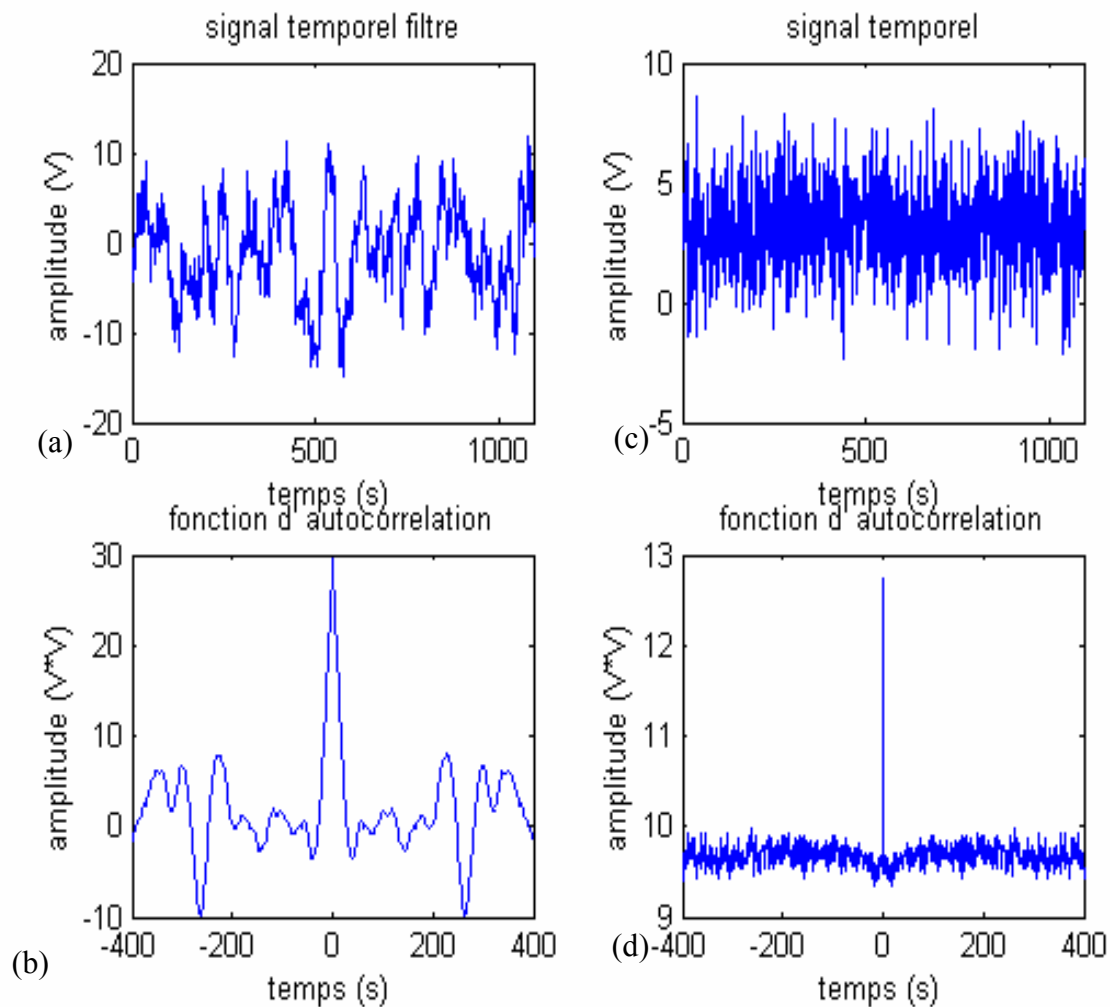


Figure. IV.7: Fonction d'autocorrélation

Ce processus filtré montre une corrélation entre les échantillons de la réalisation .Ce ci est tout à fait justifié dans la mesure où le processus de départ est filtré pour un filtre passe-bas pour lequel la réponse impulsionnelle serait une exponentielle décroissante.

L'opération de convolution du système linéaire tient compte des caractéristiques de la réponse impulsionnelle .Il serait facile de vérifier que plus le système filtrerait sévèrement les fréquences élevées ,plus la réponse impulsionnelle serait longue et plus la fonction d'autocorrélation serait étalée dans le temps.

IV.6.5- Les filtres RIF-2D :

Nous remarquons que les ondulations présentes, sur les paliers de la réponse fréquentielle du filtre conçu, dues au même phénomène de Gibbs que dans le cas des filtres 1-D .Nous constatons que la différence entre la réponse obtenue (fig. IV.8.a) et la réponse désirée (fig.IV.8.b) peut être minimisée par utilisation des logiciels plus développés, mais avec des calculs plus difficiles.

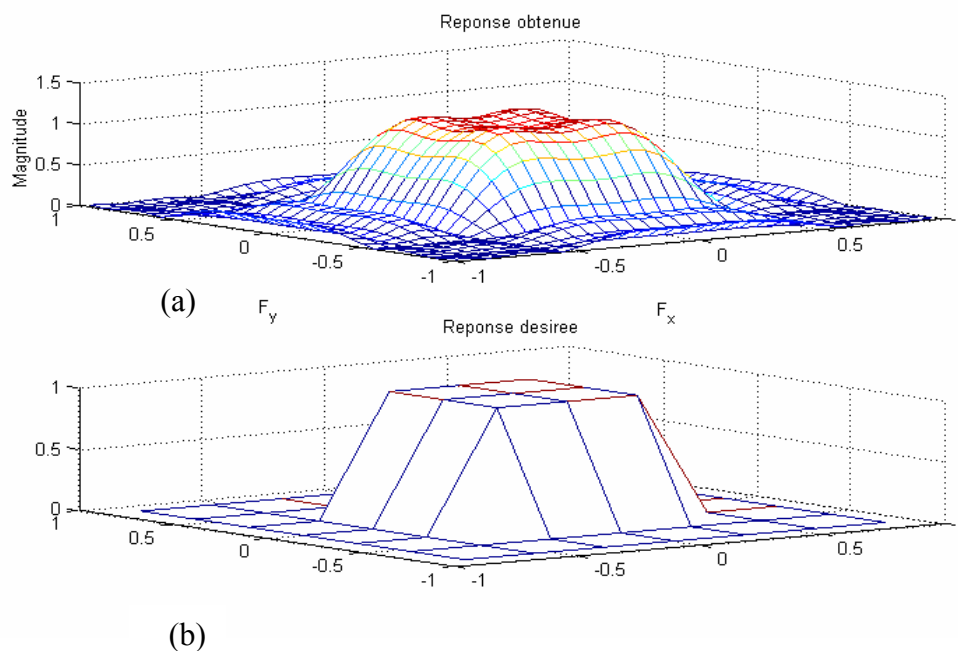


Figure IV.8 : Représentation du RIF-2D

Nous remarquons aussi que les techniques pour la conception des filtres RIF-2D sont similaires à celles utilisées pour les filtres 1-D.

IV.7-Conclusion :

La mise en œuvre des filtres RIF se fait par des circuits qui réalisent les trois opérations fondamentales que sont la mise en mémoire, la multiplication et l'addition et qui sont agencés pour fournir, à partir de la suite des données $x(n)$, une suite de sortie $y(n)$ conformément à l'équation de définition du filtre.

Nous avons classé les filtres pour leurs caractéristiques :

- En phase (linéaire ou non) ;
- En amplitude ;
- En type : polynôme ou elliptique ;
- En ordre : ordre 1, 2, ... ;
- Analogique ou numérique ;
- Stochastique ou déterministe ;
- Fréquentiel ou temporel.